

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului  
Societatea de Științe Matematice din România

## Olimpiada Națională de Matematică

Primul test de selecție pentru Olimpiada Balcanică de  
Matematică pentru juniori, 1 mai 2008

**Subiectul 1.** Fie  $p$  un număr prim,  $p \neq 3$ , și  $a, b$  numere întregi astfel ca  $p \mid a + b$  și  $p^2 \mid a^3 + b^3$ . Să se demonstreze că  $p^2 \mid a + b$  sau  $p^3 \mid a^3 + b^3$ .

**Subiectul 2.** Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  există un multiplu de  $n$  cu suma cifrelor egală cu  $n$ .

**Subiectul 3.** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic. Considerăm triunghiul echilateral  $A'UV$ , cu  $A' \in (BC)$ ,  $U \in (AC)$ ,  $V \in (AB)$  astfel ca  $UV \parallel BC$ . Definim analog punctele  $B' \in (AC)$  și  $C' \in (AB)$ . Să se demonstreze că dreptele  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  sunt concurente.

**Subiectul 4.** Fie  $ABC$  un triunghi și  $D$  mijlocul laturii  $BC$ . Pe laturile  $AB$  și  $AC$  există punctele  $M$ , respectiv  $N$ , ambele diferite de mijloacele laturilor, astfel ca  $AM^2 + AN^2 = BM^2 + CN^2$  și  $\angle MDN = \angle BAC$ . Să se arate că  $A = 90^\circ$ .

**Subiectul 5.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , și numerele întregi  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , cu proprietatea că  $0 < a_k \leq k$ , pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n$ . Știind că numărul  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  este par, să se arate că există o alegere a semnelor '+', respectiv '-', astfel încât

$$a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n = 0.$$

Timp de lucru: 3 1/2 ore

## SOLUȚII

- Subiectul 1.** Presupunem că  $p^2 \nmid a + b$  și demonstrăm că  $p^3 \mid a^3 + b^3$ , ceea ce probează cerința. .... **1p**  
 Avem  $p^2 \mid (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ , deci  $p \mid 3ab$ . .... **3p**  
 Din  $p \neq 3$  prim deducem  $p \mid a$  sau  $p \mid b$ . Cum  $p \mid a + b$ , rezultă  $p \mid a$  și  $p \mid b$ . .... **2p**  
 Atunci  $p^3 \mid a^3$  și  $p^3 \mid b^3$ , deci  $p^3 \mid a^3 + b^3$ , q.e.d. .... **1p**
- Subiectul 2.** Fie  $n \geq 1$  și fie numerele  $10^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . .... **1p**  
 Considerăm resturile la împărțirea cu  $n$  ale numerelor  $10^k$ . Cum aceste resturi sunt în număr finit, există un  $a = 0, 1, \dots, n - 1$  astfel ca  $10^m \equiv a \pmod{n}$  pentru o infinitate de valori ale lui  $m \in \mathbb{N}$ . .... **2p**  
 Dintre acestea alegem  $n$  numere  $10^{m_1}, 10^{m_2}, \dots, 10^{m_n}$  cu  $m_1 > m_2 > \dots > m_n$ . .... **2p**  
 Numărul  $A = 10^{m_1} + 10^{m_2} + \dots + 10^{m_n}$  are suma cifrelor  $n$  și  $A \equiv na \equiv 0 \pmod{n}$ , adică  $n \mid A$ , qed. .... **2p**
- Subiectul 3.** Considerăm în exteriorul triunghiului dat triunghiul echilateral  $BCA_1$ . .... **2p**  
 Atunci  $A, A', A_1$  sunt coliniare, via omotetia de centru  $A$  ce transportă  $U, V$  în  $B, C$ , respectiv. .... **2p**  
 Cum dreptele  $AA_1, BB_1, CC_1$  sunt concurente în punctul Fermat-Torricelli al triunghiului  $ABC$ , concluzia este demonstrată. .... **3p**
- Subiectul 4.** Fie  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $AC$  și  $AB$  și  $P$  simetricul lui  $D$  față de  $E$ .  
 Relația  $AM^2 + AN^2 = BM^2 + CN^2$  devine  $(\frac{c}{2} + FM)^2 + (\frac{b}{2} - NE)^2 = (\frac{c}{2} - FM)^2 + (\frac{b}{2} + NE)^2$ , de unde  $c \cdot FM = b \cdot NE$ . .... **3p**  
 Rezultă  $\frac{FM}{AC} = \frac{NE}{AB}$ , deci  $\frac{FM}{FD} = \frac{NE}{EP}$  și cum  $\angle MFD = \angle NEP$  deducem că  $\triangle MFD \sim \triangle NEP$ . De aici  $\angle MDF = \angle NPE$ . Pe de altă parte,  $\angle MDN = \angle BAC = \angle FDE$ , deci  $\angle MDF = \angle NDE$ . .... **2p**  
 Atunci triunghiul  $NPD$  este isoscel și  $NE$  este mediană, deci  $NE \perp DP$ , adică  $A = 90^\circ$ . .... **2p**
- Subiectul 5.** Considerăm  $A_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ ; avem  $A_{n-1} \leq n - 1$ . .... **2p**  
 Dacă  $A_{n-1} = 0$ , adică  $a_{n-1} = a_n$  atunci problema se reduce la pasul  $n - 2$ . **2p**  
 Dacă  $A_{n-1} > 0$  atunci problema se reduce la pasul  $n - 1$ . .... **3p**